۱.   **آیا میدان سرعت زیر تراکم ناپذیر است؟**

$$\boldsymbol{V_r = Kcos(\theta)\left(1-\frac{b}{r^2}\right)}$$
$$\boldsymbol{V_\theta = -Ksin(\theta)\left(1+\frac{b}{r^2}\right)}$$

**دیمانسیون ثوابت $\boldsymbol{K}$ و $\boldsymbol{b}$ را بیابید.**

**Solution:**

الف) شرط تراکم ناپذیری را در مختصات قطبی (دوبعدی) مینویسیم:

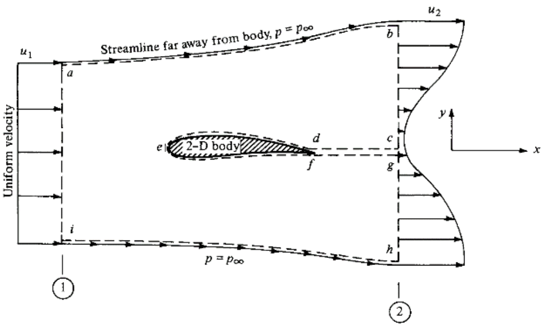
$$\nabla.V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(Kcos(\theta)\left(r-\frac{b}{r}\right)\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-Ksin(\theta)\left(1+\frac{b}{r^2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{r}\left(Kcos(\theta)\left(1+\frac{b}{r^2}\right)\right)+\frac{1}{r}\left(-Kcos(\theta)\left(1+\frac{b}{r^2}\right)\right)=0$$

پس تراکم پذیر است.

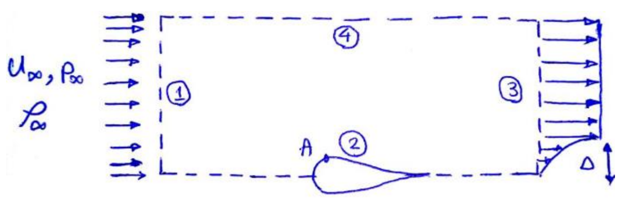
ب) کافی است دو معادله داده شده رو برهم تقسیم کنیم (برای بی بعد سازی) داریم:

$$V_r = Kcos(\theta)\left(1-\frac{b}{r^2}\right) = Kcos(\theta) - Kcos(\theta)\frac{b}{r^2}$$
$$V_r \sim {}^{m}/_{s} \qquad \rightarrow \qquad Kcos(\theta) \rightarrow {}^{m}/_{s} \qquad \rightarrow \qquad K \rightarrow {}^{m}/_{s} = [LT^{-1}]$$
$$V_r \sim {}^{m}/_{s} \qquad \rightarrow \qquad Kcos(\theta)\frac{b}{r^2} \rightarrow {}^{m}/_{s} \qquad \rightarrow \qquad b \rightarrow m^2 = [L^2]$$

۲.   **برای دو حجم کنترل زیر**




**الف-**




**معادله پیوستگی برای دو حجم کنترل را بنویسید و تفاوت آن را توضیح دهید.**

**ب- انتکرال زیر را برای هر دوحجم کنترل بنویسید.**

$$\boldsymbol{\iint (pdS)_x}$$

**Solution:**

الف)

برای شکل سمت چپ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{v}\rho dv+\oiint_{S}\rho V.dS=0 \xrightarrow{for\ steady\ flow} \oiint_{S}\rho V.dS=0$$
$$\xrightarrow{dS=dy\times 1} -\int_i^a \rho_1 u_1 dy+\int_h^b \rho_2 u_2 dy = 0 \Rightarrow \int_i^a \rho_1 u_1 dy = \int_h^b \rho_2 u_2 dy$$

برای شکل سمت راست:

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{v}\rho dv+\oiint_{S}\rho V.dS=0\xrightarrow{for\ steady\ flow}\oiint_{S}\rho V.dS=0$$

$$\Rightarrow\oiint_{S_1}\rho V.dS+\oiint_{S_2}\rho V.dS+\oiint_{S_3}\rho V.dS+\oiint_{S_4}\rho V.dS=0\xrightarrow{for\ Symmetry\ line}\oiint_{S_2}\rho V.dS=0$$

$$\Rightarrow\oiint_{S_4}\rho V.dS=-\left[\oiint_{S_1}\rho V.dS+\oiint_{S_3}\rho V.dS\right]$$

ب)

برای شکل سمت چپ :

اگر فشار در راستای *ia* و *hb* حجم کنترل با هم برابر باشد و مقدار آن $p_\infty$ باشد؛

$$\iint(pdS)_x=0$$

برای شکل سمت راست:

$$\iint(pdS)_x=\oiint_{S_1}(pdS)_x+\oiint_{S_3}(pdS)_x+\oiint_{S_4}(pdS)_x\xrightarrow{for\ x\ direction}\oiint_{S_4}(pdS)_x=0$$

$$\iint(pdS)_x=\oiint_{S_1}(pdS)_x+\oiint_{S_3}(pdS)_x=\iint((p_\infty-p_3)dS)_x$$

**۳. فرم مشتق مادی معادله مومنتم را بدست آورید.**

$$\boldsymbol{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla.(\rho uV)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x+(F_x)_{Viscous}}$$

**Solution:**

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\nabla.(\rho uV)=u\nabla.(\rho V)+(\rho V).\nabla u$$

$$\Rightarrow\ \rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\nabla.(\rho V)+(\rho V).\nabla u=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x+(F_x)_{Viscous}$$

$$\Rightarrow\ \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+V.\nabla u\right)+u\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.(\rho V)\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x+(F_x)_{Viscous}$$

از معادله پیوستگی می دانیم: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.(\rho V)=0$ و طبق تعریف مشتق مادی $\left(\frac{\partial u}{\partial t}+V.\nabla u\right)=\frac{Du}{Dt}$ داریم:

$$\Rightarrow\ \rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x+(F_x)_{Viscous}$$