بسمه تعالی

مبانی آیرودینامیک | کوییز شماره ۳ | تاریخ: ۲۶ آبان ماه ۱۳۹۴ | مدت: نیم ساعت

۱- تابع جریان زیر را در نظر بگیرید.

$$\boldsymbol{\psi = U_\infty r\ sin\theta + \frac{k\ sin\theta}{r}}$$

تابع $\boldsymbol{\phi}$ مربوط به این جریان و مولفه‌های سرعت را در مختصات قطبی به‌دست آورید.

Solution:

$$\psi = U_\infty r sin\theta + \frac{k}{r} sin\theta$$

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = \dfrac{1}{r}\left(U_\infty r cos\theta + \dfrac{k}{r}cos\theta\right) = U_\infty cos\theta + \dfrac{k}{r^2}cos\theta \\ V_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = -\left(U_\infty \sin\theta - \dfrac{k}{r^2}\sin\theta\right) \end{cases}$$

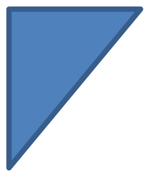
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = U_\infty cos\theta + \dfrac{k}{r^2}cos\theta \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -U_\infty r\sin\theta + \dfrac{k}{r}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = U_\infty r cos\theta - \dfrac{k}{r}\cos\theta + c(\theta) \\ \varphi = U_\infty r\cos\theta - \dfrac{k}{r}\cos\theta + g(r) \end{cases} \Rightarrow \varphi = U_\infty r cos\theta - \frac{k}{r}\cos\theta$$

۲- توزیع سرعت زیر را در نظر:

$$\vec{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{x^2 + y^2})\ \hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{2xy^2}\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

الف) آیا این جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟

ب) با استفاده از انتگرال خطی، چرخش (circulation) را حول مثلث زیر به صورت پادساعتگرد محاسبه کنید.



Solution:

a)

$u = x^2 + y^2 \quad ; \quad v = 2xy^2 \quad ; w = 0$

$$\xi = \nabla \times V = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

شرط غیر چرخشی بودن جریان این است که $\xi = \nabla \times V = 0$ و برای میدان سرعت داده شده (که مولفه w آن صفر است) می توان نوشت:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = (2y^2) - (2y) \neq 0$$

بنابراین جریان چرخشی است.

b)

$$\Gamma = -\oint_C V.ds = \oint_C \left((x^2+y^2)\,\hat{\imath} + 2xy^2\,\hat{\jmath}\right).(dx\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}) = \oint \left[(x^2+y^2)dx + 2xy^2dy\right] =$$

$$= -\left[\int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{l_3}\right] = -\left[\left(\frac{16}{3}+8\right) + \left(-\frac{8}{3}-8\right) + 0\right] = -\frac{8}{3}$$

$$l_1: \quad y = x \implies dy = dx \quad : \quad \int_{l_1} V.ds = \oint \left[(x^2+x^2)dx + 2xx^2dx\right] = \oint_0^2 2(x^2+x^3)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} + \frac{16}{4}\right) = \frac{16}{3} + 8$$

$$l_2: \quad y = 2 \implies dy = 0 \quad : \quad \int_{l_2} V.ds = \oint_2^0 (x^2+4)dx = -\oint_0^2 (x^2+4)dx = -\left[\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = -\left(\frac{8}{3} + 8\right)$$

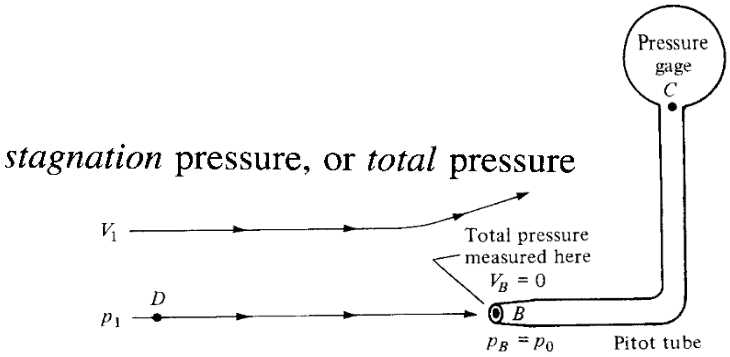
$$= -\frac{8}{3} - 8$$

$$l_3: \quad x = 0 \implies dx = 0 \quad : \quad \int_{l_3} V.ds = 0$$

۳- نحوه اندازه گیری فشار و سرعت در هواپیما را خلاصه شرح دهید.

برای اندازه گیری سرعت هواپیما از لوله پیتوت استفاده می شود. اساسا یک لوله پیتوت با تعیین اختلاف بین فشار کل (هد کل) و یا فشار ضربه ای (Impact Pressure) فشار استاتیک ، اندازه گیری سرعت و دبی را انجام می دهد.

فشار کل به وسیله لوله فشار کل یا لوله فشار (Pressure Tube) اندازه گرفته می شود. لوله فشار به صورتی نصب می شود که سطح دهانه آن روبروی خطوط جریان سیال قرار گیرد و فشار استاتیک به وسیله یک یا چند مجرا که در جداره لوله عبور سیال تعبیه شده اندازه گیری می شود.



$$p_D + \frac{1}{2}\rho {V_D}^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho {V_B}^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho {V_1}^2 = p_0 + 0$$

$$\implies V_1 = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho}}$$

برای اندازه گیری سرعت هواپیما با توجه به اینکه فشار هوای وارده بر یک جسم هنگام حرکت متناسب با سرعت آن است از فشار دینامیک استفاده می شود، برای اندازه گیری مقدار فشار دینامیک یک پراب $(probe)$می گذارند

$$\underbrace{p_1}_{\substack{Static\\pressure}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho {V_1}^2}_{\substack{dynamic\\pressure}} = \underbrace{p_0}_{\substack{total\\pressure}}$$

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho {V_\infty}^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$C_p \equiv \frac{p-p_\infty}{q_\infty} = \frac{\frac{1}{2}\rho\left({V_\infty}^2 - V^2\right)}{\frac{1}{2}\rho {V_\infty}^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2$$