۲-۱ مقدمه

همانطور که در فصل پیش اشاره شد روش عددی مورد استفاده در این پژوهش روش المان محدود می‌باشد. بطور کلی می‌توان این روش عددی را به دو دستهٔ کلی روش‌های مبتنی بر تحلیل فیزیکی[۱] و روش‌های انتگرالی[۲] تقسیم بندی نمود. در روش‌های متعلق به دسته بندی نخست، اساس کار بر مبنای فیزیک و خواص المان می‌باشد. که از مسائل قابل حل توسط این دسته می‌توان به هدایت فوریه اشاره داشت. البته از این روش‌ها بیشتر در شاخهٔ مکانیک جامدات استفاده شده و در مکانیک سیالات بدون کاربرد می‌باشند.

روش‌های ریلی-ریتز [۳] که توسط ریلی و ریتز برای اولین بار معرفی شده‌اند در دستهٔ دوم قرار می‌گیرند. قابلیت محدود این طرح ها، صرفا در پاسخ دهی به معادلات بیضوی خطی، سبب شده که گسترهٔ کاربرد این دسته از روش‌ها آنچنان وسیع نباشد. از مسائل قابل حل توسط این روش‌ها می‌توان به معادلهٔ هدایت بیضوی-خطی و یا معادلات تنش و کرنش اشاره داشت. به‌منظور توانایی حل معادلات غیر خطی، روش‌های ریلی-ریتز به مرور زمان گسترش یافت و در این راستا روش‌هایی برای حل معادلات غیر خطی معرفی شده است. اما متاسفانه این روش‌ها نیز، قادر به حل تمامی مسائل غیر خطی و غیر بیضوی نمی‌باشند. به ویژه اینکه این روش‌ها از حل معادلات ناویر-استوکس که دارای اساس فیزیکی قابل توجهی هم می‌باشد ناتوانند.

از روش‌های دیگر جای گرفته در دسته‌بندی دوم، روش‌های باقی ماندهٔ وزن‌دهی شده[۴] می‌باشند. این روش‌ها با وجود اینکه در قیاس با روش‌های ریلی-ریتز ضعیف‌تر هستند، اما در شاخهٔ علوم مکانیک سیالات دارای کاربرد بمراتب افزون‌تری می‌باشند. در پیوست الف به تفصیل روش باقی ماندهٔ وزن دهی شده، توضیح داده شده است. از روش‌های باقی‌ماندهٔ وزن‌دهی شده، می‌توان به روش‌های گلرکین[۵] و حداقل مربعات[۱] اشاره کرد.

---

[1] Physical-based methods

[2] Integral-based methods

[3] Rayleigh-Ritz

[4] Weighted residuals

[5] Galerkin methods

که هر دوی این موارد دارای قابلیت برنامه نویسی می‌باشند. اما می‌توان گفت که کاربرد روش‌گلرکین برخلاف روش‌های حداقل مربعات آسان‌تر می‌باشد. اصول کلی روش گلرکین و روش مرسوم به پتروف-گلرکین که در مکانیک سیالات دارای کاربرد می‌باشد، در پیوست ب شرح داده شده است. در قسمت های بعدی فصل جاری، به چگونگی گسسته سازی معادلات حاکم بر مکانیک سیالات توسط روش پتروف-گلرکین خواهیم پرداخت.

۲-۲ معادلات حاکم بر جریان قابل تراکم سیال

معادلاتی که به‌منظور توصیف جریان قابل تراکم سیالات استفاده می‌شود از قوانین حاکم بر بقای جرم، اندازه حرکت و انرژی بدست می‌آیند. شکل دیفرانسیلی قوانین بقایی به‌صورت زیر می‌باشد [10].

بقای جرم(پیوستگی):

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho}\, \bar{\boldsymbol{u}}) = 0 \tag{۲-۱}$$

بقای اندازه حرکت خطی:

$$\frac{\partial \bar{\rho}\, \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{\boldsymbol{u}} \bar{\boldsymbol{u}}) = \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{۲-۲}$$

بقای انرژی:

$$\frac{\partial \bar{\rho}\, \bar{E}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{E} \bar{\boldsymbol{u}}) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}) - \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{q}} \tag{۲-۳}$$

در معادلات فوق $\bar{\rho}$ معرف چگالی، $\bar{\boldsymbol{u}}$ بیان‌گر سرعت، $\bar{E}$ نشان‌دهندهٔ انرژی کلی در واحد جرم می‌باشند. $\bar{t}$ زمان و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تانسور تنش و همچنین $\bar{\boldsymbol{q}}$ بردار شار حرارتی می‌باشد. انرژی کل به‌صورت زیر محاسبه شده و برابر مجموع انرژی داخلی در واحد جرم و انرژی جنبشی در واحد جرم می‌باشد.

---

[1] Least Square

$$\bar{E} = \bar{e} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}} \qquad (۴-۲)$$

لازم به‌ذکر است که کمیت‌های باردار دارای بعد می‌باشند. علاوه بر معادلات فوق نیازمند معادلات ویژه برای تانسور تنش و بردار شار حرارتی می‌باشیم. $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\bar{p}\boldsymbol{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \qquad (۵-۲)$$

این کمیت متشکل از دو قسمت فشار و تانسورتنش لزجتی[1] می‌باشد. تانسور تنش مذکور به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\bar{\mu}\left(\bar{e} - \frac{\boldsymbol{I}}{3}tr(\bar{e})\right) \qquad (۶-۲)$$

و همچنین $\bar{e}$ نرخ تانسور کرنش بوده و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\bar{e} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\,\bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\nabla}\,\bar{\boldsymbol{u}}^T) \qquad (۷-۲)$$

$\bar{\mu}$ نیز لزجت دینامیکی سیال بوده و معمولا ثابت فرض می‌شود که در اینجا بوسیلهٔ رابطهٔ سادرلند تقریب زده می‌شود.

$$\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_o} \approx \left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}_o}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\bar{T}_o + \bar{S}}{\bar{T} + \bar{S}} \qquad (۸-۲)$$

در عبارت فوق $\bar{T}$ بیان‌گر دما و $\bar{\mu}_o$ و $\bar{T}_o$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ لزجت و دما در حالت مرجع می‌باشند. همچنین $\bar{S}$ ثابت سادرلند می‌باشد که دمای موثر نیز نامیده می‌شود. برای هوا کمیت‌های فوق به‌صورت $\bar{\mu}_o = 0/171\,mP, \bar{T}_o = 491/6^o\,R$ و $\bar{S} = 199^o R$ می‌باشد. در اینجا فرض شده است که شار حرارتی از قانون هدایت حرارتی فوریه تبعیت می‌کند.

$$\bar{\boldsymbol{q}} = -\bar{k}\bar{\nabla}\bar{T} \qquad (۹-۲)$$

که در این رابطه $\bar{k}$ ضریب پخش حرارتی می‌باشد. همچنین در این پژوهش، سیال گاز کامل بوده و معادلهٔ

---
[1] Deviatoric stress tensor

حالت به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \tag{۲-۱۰}$$

و همینطور رابطهٔ بین انرژی درونی برای گاز کامل به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\bar{e} = C_v \bar{T} \tag{۲-۱۱}$$

که در روابط فوق R ثابت جهانی گازها و C_v، حرارت مخصوص حجم ثابت[1] می‌باشند. لازم به ذکر است که هردوی کمیت‌ها در اینجا ثابت فرض شده‌اند. پس از جایگزینی $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ در معادلات (۲-۱۲) و (۲-۱۳) توسط رابطهٔ (۲-۱۴)، این معادلات با روابط زیر جایگزین می‌شوند.

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{\boldsymbol{u}} \bar{\boldsymbol{u}} + \bar{p} \boldsymbol{I}) = \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \tag{۲-۱۵}$$

و

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{E}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{E} \bar{\boldsymbol{u}} + \bar{p} \bar{\boldsymbol{u}}) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}) - \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{q}} \tag{۲-۱۶}$$

می‌توان معادلات فوق را به‌صورت کلی زیر نوشت.

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{U}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{F}}_a = \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{F}}_d \tag{۲-۱۷}$$

که در رابطهٔ فوق $\bar{\mathbf{F}}_a$ و $\bar{\mathbf{F}}_d$ به‌ترتیب نشان دهندهٔ شارهای جابجایی و پخش می‌باشند و همچنین $\bar{\boldsymbol{U}}$ بردار متغیرهای وابسته و یا بقایی می‌باشند. در فرآیندهای غیر اتلافی متغیرهای $\bar{k}, \bar{\mu}$ و $\bar{\mathbf{F}}_d$ از بین رفته و معادلهٔ (۲-۱۷) به‌صورت زیر تغییر کرده و رابطهٔ اویلر نامیده می‌شود.

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{U}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{F}}_a = 0 \tag{۲-۱۸}$$

با بسط دادن جملات دیورژانس در رابطهٔ (۲-۱)، این رابطه به‌صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\rho} + \bar{\rho} \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{۲-۱۹}$$

پس از جایگزینی معادلهٔ پیوستگی در شکل رابطهٔ(۲-۱۹) در رابطهٔ (۲-۲) شکل غیر ابقایی معادلهٔ اندازه

[1] Specific heat at constant volume

حرکت به‌صورت زیر استخراج می‌گردد.

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}}{\partial \bar{t}}+\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\nabla}\overline{\boldsymbol{u}}\right)+\overline{\nabla}\bar{p}=\overline{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{\tau}} \tag{۲-۲۰}$$

در رابطهٔ فوق عبارت $\bar{\rho}\ \overline{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\nabla}\ \overline{\boldsymbol{u}}$ و $\overline{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{\tau}}$ به‌ترتیب جملات جابجایی و اتلافی می‌باشند. به همین طریق با جایگذاری رابطهٔ اندازه‌حرکت در معادلهٔ انرژی معادلهٔ زیر حاصل می‌گردد.

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}}+\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\nabla}\bar{E}\right)+\overline{\nabla}\cdot(\bar{p}\ \overline{\boldsymbol{u}})=\overline{\nabla}\cdot(\overline{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overline{\boldsymbol{u}})-\overline{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{q}} \tag{۲-۲۱}$$

جهت بسط دادن جملهٔ انتقال حرارت هدایت از روابط(۲-۴)،(۲-۹) و(۲-۱۱) به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{q}}=\overline{\nabla}\cdot\left(\bar{k}\ \overline{\nabla}\ \bar{T}\right) \tag{۲-۲۲}$$

$$=\overline{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{k}}{C_v}\ \overline{\nabla}\left(\bar{E}-\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}\right)\right)$$

پس از جایگذاری رابطهٔ(۲-۲۲) در معادلهٔ(۲-۲۱) خواهیم داشت.

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}}+\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\nabla}\bar{E}\right)+\overline{\nabla}\cdot(\bar{p}\ \overline{\boldsymbol{u}}) \tag{۲-۲۳}$$

$$=\overline{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{k}}{C_v}\ \overline{\nabla}\bar{E}\right)+\overline{\nabla}\cdot(\overline{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overline{\boldsymbol{u}})-\overline{\nabla}\cdot\left[\frac{\bar{k}}{2C_v}\overline{\nabla}(\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\boldsymbol{u}})\right]$$

شکل دیگر معادلهٔ انرزی برحسب انرژی درونی بر حسب انرژی داخلی به‌صورت زیر می‌باشد

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{t}}+\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\nabla}\bar{e}\right)+\bar{p}\overline{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}=\overline{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{k}}{C_v}\ \overline{\nabla}\bar{e}\right)+\overline{\boldsymbol{\tau}}\ :\ \overline{\nabla}\overline{\boldsymbol{u}} \tag{۲-۲۴}$$

معادلات (۲-۱۹)، (۲-۲۰)، (۲-۲۳) و (۲-۲۴) به‌منظور تاکید بر اهمیت نسبی جملات به طریق معرفی پارامترهای بی بعد سازی زیر، بی بعد می‌شوند.

$$\nabla = L\,\bar{\nabla} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{\bar{\boldsymbol{u}}}{U_\infty} \qquad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho_\infty}$$

$$\mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu_\infty} \qquad k = \frac{\bar{k}}{k_\infty} \qquad T = \frac{\bar{T}}{T_\infty} \tag{۲-۲۵}$$

$$p = \frac{\bar{p}}{p_\infty} \qquad e = \frac{\bar{e}}{C_v T_\infty} \qquad t = \frac{\bar{t}}{L/U_\infty}$$

لازم به ذکر است در روابط فوق L معرف طول مرجع و پانویس ∞ نمایانگر مقادیر کمیت‌ها در جریان آزاد سیال می‌باشد. بوسیلهٔ تعاریف فوق معادلات حاکم بی بعد شده به‌صورت زیر خواهد بود.

بقای جرم(پیوستگی)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{۲-۲۶}$$

بقای اندازه حرکت خطی

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) + \frac{1}{\gamma {M_\infty}^2}\nabla \mathrm{p} = \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} \tag{۲-۲۷}$$

بقای انرژی(کل)

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla E\right) &+ (\gamma-1)\nabla\cdot(p\boldsymbol{u}) \\ &= \frac{\gamma}{Pr\times Re_\infty}\nabla\cdot\mu\left[\nabla E - \frac{(\gamma-1)}{2}\gamma {M_\infty}^2\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\right] \\ &+ \gamma(\gamma-1){M_\infty}^2\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{۲-۲۸}$$

بقای انرژی(درونی)

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla e\right) &+ (\gamma-1)p\,\nabla\cdot\boldsymbol{u} \\ &= \frac{\gamma}{Pr\times Re_\infty}\nabla\cdot\mu\nabla e + \gamma(\gamma-1){M_\infty}^2(\boldsymbol{\tau} : \nabla\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{۲-۲۹}$$

معادلات حالت بی‌بعد شدهٔ گاز کامل به‌صورت زیر می‌باشد.

$$p = \rho T \tag{۲-۳۰}$$

و

$$e = T \tag{۲-۳۱}$$

به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که شکل بی بعد انرژی کلی و تانسورتنش لزجتی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$E = e + \frac{(\gamma - 1)}{2} \gamma {M_\infty}^2 (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) \tag{۲-۳۲}$$

و

$$\tau = \frac{2}{Re_\infty} \mu \left(\boldsymbol{e} - \frac{\boldsymbol{I}}{3} tr(\boldsymbol{e}) \right) \tag{۲-۳۳}$$

که در رابطهٔ فوق تانسور $\boldsymbol{e}$ از طریق رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \tag{۲-۳۴}$$

علاوه بر این لزجت دینامیکی را برحسب دمای بی‌بعد بصورت زیر می‌توان بیان نمود.

$$\mu = T^{3/2} \frac{1 + S}{T + S} \tag{۲-۳۵}$$

که در رابطهٔ فوق پارامتر بی بعد S ثابت سادرلند نامیده شده و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$S = \frac{\bar{S}}{T_\infty} \tag{۲-۳۶}$$

پارامترهای بی بعدی که در روابط بی بعد شدهٔ ناویر استوکس قابل دست‌یابی است عبارتند از:

عدد رینولدز

$$Re_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty} \tag{۲-۳۷}$$

عدد پرانتل

$$Pr = \frac{\bar{\mu} C_p}{\bar{k}} \quad (۳۸-۲)$$

عدد ماخ در جریان آزاد

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}} \quad (۳۹-۲)$$

نسبت حرارت مخصوص[1]

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (۴۰-۲)$$

می‌بایستی یادآور شد که اعداد رینولدز و ماخ در شرایط آزاد بوسیلهٔ کمیت‌های فیزیکی در شرایط مرجع محاسبه گردیده اما عدد پرانتل و γ توسط کمیت‌های محلی جریان محاسبه شده است. با فرض گاز کامل بودن سیال، حرارت مخصوص و به طبع آن γ مقدار ثابتی را خواهند داشت. همچنین از آنجایی که $\bar{\mu}$ و $\bar{k}$ به‌طور معمول به‌شدت وابسته به دما می‌باشند ولی نسبت آنان تقریبا مقدار ثابتی را خواهد داشت. لذا می‌توان فرض کرد که هر دوی اعداد Pr و γ ثابت خواهند ماند.

۲-۳ گسسته سازی معادلات به روش پتروف-گلرکین

در این قسمت سعی در گسسته سازی معادلات حاکم بوسیلهٔ روش پتروف-گلرکین خواهیم داشت. شکل باقی ماندهٔ وزن دهی شدهٔ معادلات حاکم بصورت روابط زیر خواهد بود. لازم به ذکر است که از عکس قضیهٔ دیورژانس برای جملات دارای مشتقات مرتبهٔ دوم استفاده شده و در این موارد انتگرال گیری سطح به انتگرال گیری روی مرز جریان تغییر یافته است.

[1] Ratio of specific heats