تمرین سری دوم درس مبانی آیرودینامیک

بی‌بعد سازی معادلات بقا **مهلت تحویل: یکشنبه ۴ آبان ماه ۱۳۹۳**

صورت مساله:

اگر کمیتهای بابعد با علامت بار مشخص شوند و با استفاده از کمیتهای مرجع به صورت زیر بی بعد شوند:

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho_\infty} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{\bar{\boldsymbol{u}}}{U_\infty} \qquad \nabla = L\,\bar{\nabla}$$

$$T = \frac{\bar{T}}{T_\infty} \qquad k = \frac{\bar{k}}{k_\infty} \qquad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu_\infty} \tag{۳-۱}$$

$$t = \frac{\bar{t}}{L/U_\infty} \qquad e = \frac{\bar{e}}{C_v T_\infty} \qquad p = \frac{\bar{p}}{p_\infty}$$

روابط با بعد معادلات بقا به شرح زیر می‌باشد:

رابطه با بعد پیوستگی:

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{t}} + \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\bar{\nabla}\bar{\rho} + \bar{\rho}\bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{۳-۲}$$

رابطه با بعد در فرم غیر بقایی معادلهٔ ممنتم:

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{\boldsymbol{u}}}{\partial\bar{t}} + \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\bar{\nabla}\bar{\boldsymbol{u}}\right) + \bar{\nabla}\bar{p} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\tau} \tag{۳-۲}$$

معادلهٔ انرژی با بعد غیر بقایی:

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{t}} + \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\bar{\nabla}\bar{E}\right) + \bar{\nabla}\cdot(\bar{p}\,\bar{\boldsymbol{u}}) = \bar{\nabla}\cdot(\bar{\tau}\cdot\bar{\boldsymbol{u}}) - \bar{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{q}} \tag{۳-۳}$$

انرژی کل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود و برابر مجموع انرژی داخلی در واحد جرم و انرژی جنبشی در واحد جرم می‌باشد.

$$\bar{E} = \bar{e} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}} \tag{۱-۳}$$

در اینجا فرض شده است که شار حرارتی از قانون هدایت حرارتی فوریه تبعیت می‌کند.

$$\bar{\boldsymbol{q}} = -\bar{k}\bar{\nabla}\bar{T} \tag{۵-۳}$$

که در این رابطه $\bar{k}$ ضریب پخش حرارتی می‌باشد. با بسط دادن جملهٔ انتقال حرارت هدایت داریم:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{q}} &= \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{k}\,\bar{\nabla}\,\bar{T}\right)\\ &= \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{\bar{k}}{C_v}\,\bar{\nabla}\left(\bar{E} - \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}\right)\right)\end{aligned}$$

پس از جایگذاری رابطهٔ فوق در معادلهٔ انرژی خواهیم داشت:

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}} + \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \bar{\nabla}\bar{E}\right) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{p}\,\bar{\boldsymbol{u}}) = \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{\bar{k}}{C_v}\,\bar{\nabla}\bar{E}\right) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\tau} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}) - \bar{\nabla} \cdot \left[\frac{\bar{k}}{2C_v}\bar{\nabla}(\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}})\right]$$

و همچنین در اینجا سیال، گاز کامل می‌باشد و معادلهٔ حالت به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\bar{T} \tag{۶-۳}$$

و همینطور رابطهٔ انرژی درونی برای گاز کامل به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\bar{e} = C_v\bar{T} \tag{۷-۳}$$

که در روابط فوق R ثابت جهانی گازها و C_v، حرارت مخصوص حجم ثابت می‌باشند. و هردوی کمیت‌ها در اینجا ثابت فرض شده‌اند. در معادلات فوق $\bar{\rho}$ معرف چگالی، $\bar{\boldsymbol{u}}$ بیان‌گر سرعت، $\bar{E}$ نشان‌دهندهٔ انرژی کلی در واحد جرم می‌باشند. $\bar{t}$ زمان و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تانسور تنش و همچنین $\bar{\boldsymbol{q}}$ بردار شار حرارتی می‌باشد.

نشان دهید روابط بدون بعد به صورت زیر استخراج می‌شوند:

پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{۸-۳}$$

بقای اندازه حرکت خطی

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \right) + \frac{1}{\gamma {M_\infty}^2} \nabla \mathrm{p} = \nabla \cdot \tau \tag{۹-۳}$$

بقای انرژی(کل)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla E \right) + (\gamma - 1) \nabla \cdot (p \boldsymbol{u}) \\ = \frac{\gamma}{Pr \times Re_\infty} \nabla \cdot \mu \left[\nabla E - \frac{(\gamma - 1)}{2} \gamma {M_\infty}^2 \nabla (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) \right] \\ + \gamma (\gamma - 1) {M_\infty}^2 \nabla \cdot (\tau \cdot \boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{۱۰-۳}$$

معادلات حالت بی‌بعد شدهٔ گاز کامل به‌صورت زیر می‌باشد.

$$p = \rho T \tag{۱۱-۳}$$

و

$$e = T \tag{۱۲-۳}$$

پارامترهای بی بعدی که در روابط بی بعد شدهٔ ناویر استوکس قابل دست‌یابی است عبارتند از

عدد رینولدز

$$Re_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty} \tag{۱۳-۳}$$

عدد پرانتل

$$Pr = \frac{\bar{\mu} C_p}{\bar{k}} \tag{۱۴-۳}$$

عدد ماخ در جریان آزاد

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}} \tag{۱۵-۳}$$

نسبت حرارت مخصوص

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \tag{۱۶-۳}$$